6/11

(41)

$(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολ. σε ένα ορισμ. δ.χ. E με $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha_\nu = \alpha \in E$ και $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} \beta_\nu = \beta \in E$. $(p_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(q_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ πραγμ. ακολουθίες με

$$\lim_{\nu\in\mathbb{N}} p_\nu = p \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{\nu\in\mathbb{N}} q_\nu = q \in \mathbb{R}$$

$(p_\nu \alpha_\nu + q_\nu \beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν E. N.δ.ο. $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} p_\nu\alpha_\nu + q_\nu\beta_\nu = p\alpha + q\beta$

Απόδειξη

P ορισμ. άρα $\rho(p_\nu\alpha_\nu + q_\nu\beta_\nu, p\alpha + q\beta) = P(p_\nu\alpha_\nu + q_\nu\beta_\nu - p\alpha - q\beta) =$

$$= P[(p_\nu\alpha_\nu - p_\nu\alpha) + (p_\nu\alpha - p\alpha) + (q_\nu\beta_\nu - q_\nu\beta) + (q_\nu\beta - q\beta)] \leq$$

$$\leq P(p_\nu\alpha_\nu - p_\nu\alpha) + P(p_\nu\alpha - p\alpha) + P(q_\nu\beta_\nu - q_\nu\beta) + P(q_\nu\beta - q\beta) =$$

$$= P(p_\nu(\alpha_\nu - \alpha)) + P(\alpha(p_\nu - p)) + P(q_\nu(\beta_\nu - \beta)) + P(\beta(q_\nu - q)) =$$

$$= |p_\nu| P(\alpha_\nu - \alpha) + |p_\nu - p| P(\alpha) + |q_\nu| P(\beta_\nu - \beta) + |q_\nu - q| P(\beta) =$$

$$= |p_\nu| \overbrace{\rho(\alpha_\nu, \alpha)}^{\to 0} + \overbrace{|p_\nu - p|}^{\to 0} P(\alpha) + |q_\nu| \overbrace{\rho(\beta_\nu, \beta)}^{\to 0} + \overbrace{|q_\nu - q|}^{\to 0} P(\beta) \longrightarrow 0$$

γιατί οι ακολουθίες είναι φραγμένες (μηδενικές × φραγμένες)

$A \subseteq E$, (E, ρ) μ.χ., N.δ.ο. $A'' \subseteq A'$ $\left(A' = \{x : (\forall r>0) : \underline{B}(x,r) \cap A \neq \emptyset\}\right)$

Απόδειξη

Έστω x τυχόν στοιχείο, $x \in A''$ και $r > 0$ (r τυχόν)

$x \in A'' \Longrightarrow \underline{B}(x,r) \cap A' \neq \emptyset \Rightarrow (\exists y) : y \in \underline{B}(x,r) \wedge y \in A'$

Θεωρώ $r' = \min\{\rho(x,y), r - \rho(x,y)\}$. $\underline{B}(y,r') \underset{(*)}{\subseteq} \underline{B}(x,r)$

$y \in A' \Longrightarrow \underline{B}(y,r') \cap A \neq \emptyset \xRightarrow{(*)} \underline{B}(x,r) \cap A \neq \emptyset \xRightarrow{(\forall r)} x \in A' \Rightarrow A'' \subseteq A'$

Δεν ισχύει η ισότητα, παράδειγμα:

$A = \{\frac{1}{\nu} : \nu \in \mathbb{N}\}$ στον $(\mathbb{R}, |\,|)$

$A' = \{0\} \Longrightarrow A'' = \{0\}' = \emptyset$ ισχύει $\emptyset = A'' \subset A' = \{0\}$

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

(42)

Ισχύει $\bar{A} = A \cup A'$

Ν.δ.ο. ένα σύνολο A είναι κλειστό $\iff A' \subseteq A$

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Έστω $A' \subseteq A$ τότε $\bar{A} = A \cup A' = A \Rightarrow A$ κλειστό

($\Rightarrow$) Έστω A κλειστό $A = \bar{A} = A \cup A' \Rightarrow A' \subseteq A$

$(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολ. εν (E, ρ)

Ν.δ.ο. $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ βασική $\iff \lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \delta(A_n) = 0$, $A_n = \{a_\nu : \nu \geq n\}$

($\Rightarrow$) Έστω $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ βασική κ έστω $\varepsilon > 0$ (ε τυχόν)

τότε: $(\exists n)(\forall \mu, \nu \text{ εν } \mathbb{N})\left(\begin{smallmatrix} \mu \geq n \\ \nu \geq n \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow \rho(a_\mu, a_\nu) < \varepsilon$

Άρα $\sup\{\rho(a_\mu, a_\nu) : \mu \geq n \text{ κ } \nu \geq n\} \leq \varepsilon \Rightarrow \delta(A_n) < \varepsilon \Rightarrow$

$\forall m > n \xrightarrow{m \geq n \Rightarrow A_m \subseteq A_n} \delta(A_m) \leq \varepsilon$ Άρα $\lim\limits_{m \in \mathbb{N}} \delta(A_m) = 0$

($\Leftarrow$) Έστω $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \delta(A_n) = 0$ κ $\varepsilon > 0$ (ε τυχόν)

$(\exists \hat{n})(\forall n \geq \hat{n}) : \delta(A_n) < \varepsilon \Rightarrow (\exists \hat{n})(\forall n \geq \hat{n}) : \sup\{\rho(a_\mu, a_\nu) : \mu \geq n \text{ κ } \nu \geq n\} < \varepsilon$

$(\exists \hat{n})(\forall \mu, \nu \text{ εν } \mathbb{N})\left(\begin{smallmatrix} \mu \geq \hat{n} \\ \nu \geq \hat{n} \end{smallmatrix}\right) : \rho(a_\mu, a_\nu) < \varepsilon \Rightarrow (a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ βασική

E σταθ. δ.χ. A, B υποσύνολα του E. Ν.δ.ο. $\bar{A} + \bar{B} \subseteq \overline{A+B}$

$(A+B = \{x+y : x \in A \wedge y \in B\})$

Απόδειξη

Ισχύει: $x \in \bar{A} \iff (\exists (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}) : \lim x_\nu = x$ (*)

Θεωρώ $z \in \bar{A} + \bar{B} \Rightarrow z = x + y$, $x \in \bar{A} \wedge y \in \bar{B} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} (\exists (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ εν } A) : \lim x_\nu = x \\ (\exists (y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ εν } B) : \lim y_\nu = y \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu + \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} y_\nu = \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} (x_\nu + y_\nu)$ Άρα $x + y = \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} (x_\nu + y_\nu)$

Αλλά $(x_\nu + y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία εν $A+B \overset{(*)}{\Longrightarrow} x+y \in \overline{A+B} \Rightarrow z \in \overline{A+B}$

$\Rightarrow \bar{A} + \bar{B} \subseteq \overline{A+B}$

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi

$(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ Βασική κ $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$: $\rho(\alpha_\nu,\beta_\nu)<\frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$

Ν.δ.ο. $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ Βασική

Απόδειξη

$\rho(\beta_\nu,\beta_\mu)\le\rho(\beta_\nu,\alpha_\nu)+\rho(\alpha_\nu,\alpha_\mu)+\rho(\alpha_\mu,\beta_\mu)$ (*)

Θεωρώ τυχόν ε : $\varepsilon>0$.

Επειδή $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική άρα $(\exists n_1)(\forall \mu,\nu \in\mathbb{N})\left(\begin{matrix}\mu>n_1\\ \nu>n_1\end{matrix}\right)\Rightarrow \rho(\alpha_\mu,\alpha_\nu)<\frac{\varepsilon}{3}$

και $(\exists n_2)(\forall\nu>n_2): \frac{1}{\nu}<\frac{\varepsilon}{3}$

Θεωρώ $\hat{n}=\max\{n_1,n_2\}$ και $\mu,\nu\in\mathbb{N}$ με $\mu>\hat{n} \wedge \nu>\hat{n}$

τότε η (*) δίνει: $\rho(\beta_\nu,\beta_\mu)\le\frac{1}{\nu}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{\mu}<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$

Άρα και η $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι Βασική

Δίνεται E μ.χ. και $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν E με $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu = x\in E$

Ν.δ.ο. αν $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι εν $E-B(y,r)$, $r>0$ τότε $\rho(x,y)\ge r$

Απόδειξη

Ισχύει $E-B(y,r)=(B(y,r))^c$ κλειστό $\Rightarrow \lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu = x\in B(y,r)^c \Rightarrow \rho(x,y)\ge r$

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.mobi